Titel des Vortrages

Die Rolle des Satzes von Perron-Frobenius in Leontief und Sraffa Modellen

Jean-François Emmenegger, Daniel Chable,
e-mail : jean-francois.emmenegger@unifr.ch

9. Input-Output Workshop, Universität Osnabrück, 30.-31.3.2017

Mathematische Sätze und ökonomische Bedingungen (1)

- **W. Leontief (1905-1999)** Input-Output Matrix $\mathbf{Z}$ in *monetären* und Matrix $\mathbf{S}$ in *physischen* Termen
- **Piero Sraffa (1898-1983)** "Warenproduktion mittels Waren" (WmW) in der engl. Ausgabe (1960), deutsche Ausgabe (1976) : das Zirkularitätsprinzip, das Überschussprinzip (Profit, Löhne), eine Wirtschaft ohne Geld (*numéraire*)
- Übergang von $\mathbf{Z}$ zu $\mathbf{S}$ durch Diagonalmatrix $\hat{\mathbf{p}}$ von Preisen.
- Mathematische Sätze von **Perron & Frobenius**
- Begriffe : *Nichtnegativität* und *Positivität* von Matrizen
- Produktive Leontief Modelle : in **Ashmanow**
- Ökonomische Annahmen : Schefold (1989), oder ökonomische Bedingungen : Manara (1968)

Leontief : Input-Output-Tabelle (Geldgrössen) (2)

1) Input-Output Tabellen in monetären und physischen Termen

Hersteller der Erzeugnisse	Abnehmer der Erzeugnisse S_1	S_2	$\ldots$	S_j	$\ldots$	S_n	End-nachfrage	gesamte Verwendung
S_1	z_{11}	z_{12}	$\ldots$	z_{1j}	$\ldots$	z_{1n}	f_1	x_1
S_2	z_{21}	z_{22}	$\ldots$	z_{2j}	$\ldots$	z_{2n}	f_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	z_{i1}	z_{i2}	$\ldots$	z_{ij}	$\ldots$	z_{in}	f_i	x_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	z_{n1}	z_{n2}	$\ldots$	z_{nj}	$\ldots$	z_{nn}	f_n	x_n
Wertschöpfung	v_1	v_2	$\ldots$	v_j	$\ldots$	v_n	V/F	
gesamtes Aufkommen	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n		X

TABLE – Input-Output Tabelle von n Industriesektoren mit Endnachfrage und Wertschöpfung

Leontief & Sraffa : IOT in (physischen Grössen) (3)

Hersteller der Erzeugnisse	Abnehmer der Erzeugnisse S_1	$\ldots$	S_j	$\ldots$	S_n	End-nachfrage	gesamte Verwendung
S_1	s_{11}	$\ldots$	s_{1j}	$\ldots$	s_{1n}	d_1	q_1
S_2	s_{21}	$\ldots$	s_{2j}	$\ldots$	s_{2n}	d_2	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	s_{i1}	$\ldots$	s_{ij}	$\ldots$	s_{in}	d_i	q_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	s_{n1}	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	s_{nn}	d_n	q_n
Wertschöpfung Arbeitsaufwand $[Arbeitszeit/Periode]$	L_1	$\ldots$	L_j	$\ldots$	L_n	L/D	
gesamtes Aufkommen	$\downarrow$ q_1	$\ldots$ $\ldots$	$\downarrow$ q_j	$\ldots$ $\ldots$	$\downarrow$ q_n		Q

TABLE – Input-Output Tabelle von n Industriesektoren mit Endnachfrage und Wertschöpfung

Piero Sraffa (4)

2) Sraffa's Produktionsschema und Preisgleichungen

Man betrachte die Matrix $\mathbf{S}$ und den Vektor $\mathbf{q} = \mathbf{Se} + \mathbf{d}$ der *gesamten Verwendung*, sowie den Vektor der Arbeitszeiten $\mathbf{L}$.

Sraffa's Produktionsschema stellt jeden Sektor j, $j = \{1, .., n\}$ (Zeile) zusammen mit dem Arbeitsaufwand L_j und der erzeugten Menge $q_j > 0$ dar.

$$\begin{array}{rcl}
(s_{11},\ s_{21},\ s_{31},\ ...,\ s_{n1},\ L_1) & \rightarrow & (q_1,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0) \\
(s_{12},\ s_{22},\ s_{32},\ ...,\ s_{n2},\ L_2) & \rightarrow & (0,\ q_2,\ 0,\ ...,\ 0) \\
(....,\ ....,\ ....,\ ....,\ ....,\ ...) & \rightarrow & (0,\ 0,\ 0,\ ....,\ 0) \\
(s_{1n},\ s_{2n},\ s_{3n},\ ..,\ s_{nn},\ L_n) & \rightarrow & (0,\ 0,\ 0,\ ...,\ q_n) \\
(\mathbf{S}', \mathbf{L}) & \rightarrow & (\hat{\mathbf{q}})
\end{array} \tag{1}$$

Damit ergeben sich Preisgleichungen mit/ohne Lohnarbeit : $\mathbf{p} = [p_1, ..., p_n]'$.

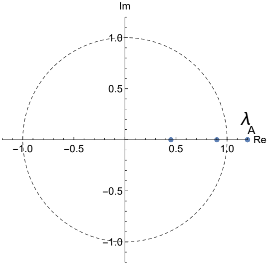
$$\mathbf{S}'\mathbf{p}(1+r) + w \cdot \mathbf{L} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} \ \Rightarrow\ \mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} \ \Rightarrow\ \mathbf{C}'\mathbf{p} = \frac{1}{1+R}\mathbf{p}. \tag{2}$$

Aufschlüsselung des totalen Outputs

$$X = \mathbf{e}'\mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = (\mathbf{Se})'\mathbf{p}(1+R) = K + Y = \mathbf{e}'\hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{q}'\mathbf{p} \Rightarrow Y = \mathbf{d}'\mathbf{p}. \tag{3}$$

Oscar Perron (1880-1975) (5)

3) Theorem von Perron (1907) :
Eine reelle, positive $(n \times n)$ $\mathbf{A}$ *Matrix besitzt genau einen reellen, positiven, maximalen Eigenwert* $\lambda_A > 0$, *dem bis auf seine Vielfachheit ein rechter positiver Eigenvektor* $\mathbf{x}_A > \mathbf{o}$ *und ein linker positiver Eigenvektor* $\mathbf{p}_A > \mathbf{o}$ *zugeordnet sind.*



$$0 = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lambda^i, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A, \qquad \mathbf{p}'_A \mathbf{A} = \lambda_A \mathbf{p}'_A \qquad (4)$$

Die Eigenwerte λ der Matrix $\mathbf{A}$ werden berechnet (4), die Frobeniuszahl λ_A wird bestimmt, sowie *rechts* und *links Eigenvektoren* $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{p}_A$.

Reduzible Matrizen (6)

4) Reduzible and irreduzible Matrizen

Die Positivität der Matrix $\mathbf{A}$ ist zu einschränkend. Nullen müssen in der Matrix $\mathbf{A}$ zugelassen werden, so dass diese *nicht-negativ* werden.

Damit tritt das Problem der *reduziblen* Matrizen auf.

Matrix $\mathbf{A}$ ist *nicht-negativ*, Matrix $\mathbf{P}$ ist eine Permutationsmatrix,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_{11} & \widetilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Wenn $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$ reduzible ist, kann man weiterfahren,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_{11} & \widetilde{\mathbf{A}}_{12} & \dots & \widetilde{\mathbf{A}}_{1s} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{A}}_{22} & \dots & \widetilde{\mathbf{A}}_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \widetilde{\mathbf{A}}_{ss} \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Alle Untermatrizen $\widetilde{\mathbf{A}}_{11}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{22}$, ..., $\widetilde{\mathbf{A}}_{ss}$ sind *irreduzibel*. Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$ heisst *kanonisch*.

Reduzible Matrizen (7)

Wie bestimmt man Permutationsmatrizen $\mathbf{P}$, die (5), (6) herstellen ?

Hat man eine Permutation σ, so ist es relativ einfach bei kleinen n die zugehörige Permutationsmatrix zu konstruieren.

Takayama (*Mathematical Economics*, p. 369) konstruiert solche Beispiele.

Beispiel 1 : (Übergang einer reduziblen Matrix in ihre kanonische Form)
Die Matrix $\mathbf{Z}_1$ wird durch die orthogonale Permutationsmatrix $\mathbf{P}_\sigma$ in die kanonische Form $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ gebracht,

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_1 = \mathbf{P}_\sigma^{-1} \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Sraffa benötigt eigentlich nur die 1-stufige Reduktion.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{A}}_{11} & \widetilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

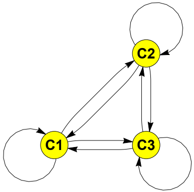
Dies führt auf die Unterscheidung von *Basis*- und *Nichtbasisprodukten*.

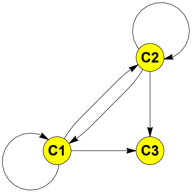
Basis- und *Nicht-Basisprodukte*, (WmW, Par. 6, 7) (8)

5) Basis- und Nichtbasisprodukte, Sraffa's

'Das Kriterium gilt, ob eine Ware – sei es direkt oder indirekt – in die Produktion *aller Waren* eingeht oder nicht. Die erstere werden wir *Basisprodukt*, die letztere *Nicht-Basisprodukt* nennen.' **Beispiel 2** (Irreduzible und reduzible Matrizen)

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 90 & 50 & 40 \\ 120 & 125 & 40 \\ 60 & 150 & 200 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 280 & 180 & 115 \\ 240 & 240 & 120 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$





$$\mathbf{S}_1{}^2 > \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{S}_2{}^2 \geqq \mathbf{0} \qquad (10)$$

Ein Sraffa Preismodell (9)

Beispiel 3 : WmW, Kap. 2, Par.5

$$\begin{array}{lcl} (280\ Qr.\ Weizen,\ 12\ T.\ Eisen) & \rightarrow & (575\ qr.\ Weizen,\ 0) \\ (120\ Qr.\ Weizen,\ \ 8\ T.\ Eisen) & \rightarrow & (0,\ 20\ T.\ Eisen). \end{array} \tag{11}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 280 & 120 \\ 12 & 8 \end{bmatrix};\ \mathbf{Se} = \begin{bmatrix} 280 & 120 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 20 \end{bmatrix} \\ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 575 \\ 20 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \mathbf{q} - \mathbf{Se} = \begin{bmatrix} 575 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 400 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{12}$$

$$\mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}. \tag{13}$$

$$\hat{\mathbf{q}}^{-1}(\mathbf{S}'\mathbf{p}) = (\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{S}')\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{p} = (\frac{1}{1+R})(\hat{\mathbf{q}}^{-1}\hat{\mathbf{q}})\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{C}'\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \tag{14}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \begin{bmatrix} 280 & 120 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{575} & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{56}{115} & 6 \\ \frac{12}{575} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

$$P_2(\lambda) = det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \frac{102}{115}\lambda + \frac{8}{115} = (\lambda - \frac{4}{5})(\lambda - \frac{2}{23}). \tag{16}$$

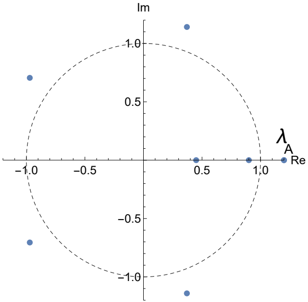
Frobeniuszahl : $\lambda_C = \frac{4}{5}$, $R = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$, Preis Eigenvektor $\mathbf{p} = k[1, 15]' > 0!$.

Satz von Perron-Frobenius (1912) (10)

6) Theorem von Perron-Frobenius Theorem (für irreduzible und nicht-negative Matrizen)

1. Spektralradius : $\rho(\mathbf{A}) > 0$
2. $\lambda_A = \rho(\mathbf{A})$ ist ein algebraisch einfacher Eigenwert von $\mathbf{A}$.
3. Es gibt positive rechte Eigenvektoren $\mathbf{x}$, so dass $\mathbf{Ax} = \lambda_A \mathbf{x}$.
4. Es gibt positive linke Eigenvektoren $\mathbf{y}$, so dass $\mathbf{y}'\mathbf{A} = \lambda_A \mathbf{y}'$. ▲

$$P_n(\lambda) = \mathrm{Det}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda^m - \lambda_A^m)...(\lambda - \lambda_n), \qquad m \leqq n, \qquad m \in \mathbb{N} \quad \textbf{(17)}$$



Gantmacher (Matrizentheorie, p. 409, Satz 3) (11)

7) Verallgemeinertes Theorem von Perron-Frobenius Theorem
(für nicht-negative Matrizen)

Jede *nicht-negative* Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, .., n$ besitzt stets eine nicht-negative charakteristische Wurzel $\lambda_A \geqq 0$, die vom Betrag aller übrigen charakteristischen Wurzeln die Matrix $\mathbf{A}$ nicht übertroffen wird. Dieser 'maximalen' charakteristischen Wurzel λ_A entspricht ein nicht-negativer (semi-positiver) Eigenvektor $\mathbf{x}_A$.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_A = \lambda_A \mathbf{x}_A \qquad (\mathbf{x}_A \geqq \mathbf{o}, \quad \mathbf{x}_A \neq \mathbf{o}). \quad \blacktriangle \tag{18}$$

Beispiel 4 : (Grenzfall *nicht-negativer reduzibler* Matrizen) Die Nullmatrix $\mathbf{O}$. Bestimme Frobeniuszahl und assozierte Eigenvektoren.

$$P_3(\lambda) = \mathrm{Det}(\mathbf{O} - \lambda \mathbf{I}) = (\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\lambda^3. \tag{19}$$

Man setzt : $P_3(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Die Frobeniuszahl ist $\lambda_O = 0$. Die (rechts) Eigenvektoren $\mathbf{O} \cdot \mathbf{x}_O = \mathbf{o}$ sind $\mathbf{x}_O = [x_1, x_2, x_3]' \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{o}\}$, in Lehrbüchern sind auch die Eigenvektoren $[1, 0, 0]' \geq \mathbf{o}$, $[0, 1, 0]' \geq \mathbf{o}$, $[0, 0, 1]' \geq \mathbf{o}$ erwähnt.

C. A. Ashmanow (1984) (12)

Theorem 4 : $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$, $\lambda > \lambda_A \Rightarrow \exists\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{j=o}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j}{\lambda^{j+1}} \geqq \mathbf{0}$.

8) Leontief Modelle (produktive Leontief Modelle)

(für nicht-negative Matrizen)
Man habe eine *nicht-negative* Input-Output Koeffizienten Matrix $\mathbf{A}$, und einen *nicht-negativen* Vektor der *Endnachfrage* $\mathbf{f}$ $(\mathbf{f} \geqq \mathbf{o})$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \geqq \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} \geqq \mathbf{o}, \tag{20}$$

so haben wir ein *Leontief-Modell* (*produktives Leontief-Modell*) vorliegen.

Theorem 5 :
Für eine Matrix $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$ ist ein *Leontief-Modell* produktiv $\Leftrightarrow$ $\lambda_A < 1$.

Bertram Schefold : Ökonomische Bedingungen (13)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{s}_{.1}, \mathbf{s}_{.2}, \ldots, \mathbf{s}_{.n}] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}'_{1.} \\ \mathbf{s}'_{2.} \\ \ldots \\ \mathbf{s}'_{n.} \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Bertram Schefold formuliert folgende ökonomischen Bedingungen :

- Jeder Produktionszweig j produziert eine positive Menge der Ware j, sonst existiert dieser Zweig nicht.
- Konsequenterweise gilt : $q_j > 0$ (Outputmenge) und $x_j > 0$ (Outputwert) $\Rightarrow \mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{q} > \mathbf{0}$.
- Folglich existieren $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ und $\hat{\mathbf{q}}^{-1}$.
- Jeder Produktionszweig j muss mindestens eine Ware als Produktionsmittel verarbeiten. Nicht jede Ware muss Produktionsmittel sein !
- Konsequenterweise muss jeder Zweig j mindestens einen Input haben, also sind $\mathbf{z}_{.j} \geq \mathbf{o}$, $\mathbf{s}_{.j} \geq \mathbf{o}$ und $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$.

$$\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{q}}^{-1} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{S} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Z}, \qquad \mathbf{d} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{f}. \qquad (22)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}. \qquad (23)$$

Schlussfolgerunen (14)

- Der Satz von Perron (1907) für positive Matrizen $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ist einschränkend. Das schliesst die Nicht-Basisprodukte aus!
- The Satz von Perron-Frobenius (1912) gilt nur für irreduzible Matrizen $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$. Das schliesst die Nicht-Basisprodukte aus!
- Gantmacher's Formulierung für Matrizen $\mathbf{A} \geqq \mathbf{0}$ führt auf Frobeniuszahlen $\lambda \geqq 0$ und Eigenvektoren $\mathbf{p} \geqq \mathbf{o}$. Hier sind Basis- und Nicht-Basisprodukte enthalten! Aber die Matrizenmenge ist zu umfassend!
- Bertram Schefold (1989) formuliert ökonomische Bedingungen für Sraffa Preismodelle, so dass positive Outputvektoren $\mathbf{q} > \mathbf{o}$ und positive Preisvektoren $\mathbf{p} > \mathbf{o}$ garantiert sind!
- Carlo Felice Manara (1968) hat andere ökonomische Bedingungen formuliert.
- Ashmanov (1984) zeigt die Verbindung zwischen Perron-Frobeniussätzen und produktiven Leontief Modellen!