Titel des Vortrages

Zur Messung der Produktivität einer Volkswirtschaft

Jean-François Emmenegger*, Hassan Ahmed Nour Eldin**,
*ehemaliges Departement für Quantitative Wirtschaftsforschung,
Universität Freiburg,
Boulevard de Pérolles 90 - 1700 Fribourg, Schweiz,
e-mail : jean-francois.emmenegger@unifr.ch,
**Lehrstuhl für automatische Kontrolle und technische Kybernetik,
Universität Wuppertal, Deutschland,
eldin@uni-wuppertal.de

Input-Output Workshop, Universität Osnabrück, Deutschland,
29.2.-1.3.2024

Einleitung und Messsung der Produktivität (1)

- Ein überraschendes Lemma, veröffentlicht in der Chinese Business Review, Vol 22, Jan-Mar, 2023,
- Gemäss den OECD-Standards "wird Produktivität üblicherweise als Verhältnis eines Volumenmasses des Outputs zum Volumenmass des verbrauchten Inputs definiert",

$$\rho = \frac{V(Output)}{V(Input)}, \tag{1}$$

- Dieses Verhältnis gibt an, wie effizient Produktionsinputs, wie Arbeit und Kapital, in einer Volkswirtschaft eingesetzt werden, um ein bestimmtes Produktionsniveau zu erreichen.
- Die Produktivität ist ein sehr allgemeiner Begriff, der offensichtlich der Menschheit schon lange bekannt ist.

Input-Output Tabellen in monetärer Form, (Leontief) (2)

Aufkommen Gütergruppen (CPA)	**Verwendung** Produktionsbereiche (NACE) S_1	S_2	...	S_j	...	S_n	letzte Verwendung von Gütern	gesamte Verwendung von Gütern
S_1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1j}	...	z_{1n}	f_1	x_1
S_2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2j}	...	z_{2n}	f_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	z_{i1}	z_{i2}	...	z_{ij}	...	z_{in}	f_i	x_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nj}	...	z_{nn}	f_n	x_n
B-Wertschöpfung	v_1	v_2	...	v_j	...	v_n	$V = F$	
gesamtes Aufkommen	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n		X

TABLE – Symmetrische IOT aus n produzierenden Sektoren, mit Vektor der letzten Verwendung und Vektor der Bruttowertschöpfung

Input-Output Tabellen vom Sraffa-Typ (3)

Produkte (CPA) Aufkommen	Input der Produktionsbereiche S_1	S_2	...	S_j	...	S_n	Über-schuss	totaler Output
S_1	s_{11}	s_{12}	...	s_{1j}	...	s_{1n}	d_1	q_1
S_2	s_{21}	s_{22}	...	s_{2j}	...	s_{2n}	d_2	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	s_{i1}	s_{i2}	...	s_{ij}	...	s_{in}	d_i	q_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	s_{n1}	s_{n2}	...	s_{nj}	...	s_{nn}	d_n	q_n
tot. Arbeitszeiten	L_1	L_2	...	L_j	...	L_n	L	
totaler Output	q_1	q_2	...	q_j	...	q_n		

TABLE – Eine symmetrische Input-Output Tabelle mit Überschuss und totalem Output in physischer Form, sowie totalen Arbeitszeiten pro Sektor

Vektoren und Matrizen, Zerlegbarkeit von Matrizen (4)

- Überschussvektor $\mathbf{d} > \mathbf{o}$, Vektoren des totalen Outputs $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d} > \mathbf{o}$ in physischen Grössen, $\mathbf{f} > \mathbf{o}$, Vektor der ges. Verwendung in monetären Grössen, $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f} > \mathbf{o}$
- Der Vektor der Vorleistungen der Produktionsbereiche $\mathbf{y}_I = \mathbf{Z}'\mathbf{e} \geq \mathbf{o}$, Vektor der Wertschöpfungen $\mathbf{v} > \mathbf{o}$
- gesamtes Aufkommen $\mathbf{y} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} > \mathbf{o}$ ist positiv
- Gesamte Verwendungen der Güter $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f}$ gleich gesamtes Aufkommen $\mathbf{y} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} > \mathbf{o}$ der Güter, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Zerlegbarkeit von Matrizen :

$$\widetilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Z}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Z}}_{11} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \widetilde{\mathbf{Z}}_{21} & \widetilde{\mathbf{Z}}_{22} & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{\mathbf{Z}}_{s1} & \widetilde{\mathbf{Z}}_{s2} & \ldots & \widetilde{\mathbf{Z}}_{ss} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

- $\widetilde{\mathbf{Z}}_{11}$, $\widetilde{\mathbf{Z}}_{22}$, ..., $\widetilde{\mathbf{Z}}_{ss}$ sind nun unzerlegbar.

Unzerlegbarkeit von Matrizen, Satz von Frobenius (5)

- Wenn die $n-1$ Matrixpotenz der Matrix $(\mathbf{Z}+\mathbf{I})^{(n-1)}$ positiv ist, dann ist die nicht-negative Matrix $\mathbf{Z}$ unzerlegbar,
- Eigenwert (Wurzeln von $P_n(\lambda)$) und Eigenvektoren $(\mathbf{s}_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{s}_1 &= \lambda_Z \mathbf{s}_1, \\ P_n(\lambda) = \det(\mathbf{Z}-\lambda\mathbf{I}) = 0 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^i. \end{aligned} \tag{3}$$

- Der Satz von Perron-Frobenius sagt nun, dass eine nicht–negative quadratische, unzerlegbare Matrix $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$ reeller Komponenten genau einen maximalen, reellen, positiven Eigenwert $\lambda_Z > 0$ (Frobenius Zahl genannt) besitzt, zu welchem ein positiver Eigenvektor $\mathbf{s}_1 > \mathbf{o}$ (mit lauter positiven Komponenten) assoziiert ist.
- Genau das suchen wir, Verflechtungsmatrizen $\mathbf{Z}$ mit positiven Frobenius Zahlen und positivem assoziiertem Eigenvektor.

Grenzfälle (6)

- Wenn die Matrix zerlegbar ist, ist der Satz von Perron-Frobenius nicht anwendbar.
- Abgeschwächte Form des Frobeniussatzes für quadratische, nicht-negative, **zerlegbare** $n \times n$ Matrizen : die Frobenius Zahl $\lambda_Z \geq 0$ und der assoziierte Eigenvektor $\mathbf{s}_1 \geq \mathbf{o}$.
- Diese abgeschwächte Form genügt jedoch nicht.
- Es gibt nicht-negative zerlegbare Matrizen, mit positiver Frobenius Zahl und positivem assoziertem Eigenvektor.
- Aber, semi-positive, zerlegbare Verflechtungsmatrizen $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$ mit $\lambda_Z > 0$, $\mathbf{s}_1 > \mathbf{o}$ kann man nicht ausschliessen.
- Es genügt, dass eine Matrix eine volle nicht Nullzeile besitzt, etwa den Produktsektor der "Dienstleistungen der öffentlichen Verwaltung und der Verteidigung", dann existiert $\lambda_Z > 0$.
- Und dies genügt auch nicht. Man braucht $\lambda_Z > 0$, $\mathbf{s}_1 > \mathbf{o}$.

Das Preismodell von Sraffa (7)

- **Piero Sraffa's (1898-1983)** Idee besteht darin, mit der Verflechtungsmatrix $\mathbf{S}$ mittlere Produktionspreise p_i für jede Produktpalette S_i, $i = 1..., n$ zu berechnen,
- gleiche Gewinnrate $r = P/K$ (Produkt durch Kapital),
- Arbeitsstunden L_j der Sektoren S_j, Lohnrate $w = W/L$ (Gesamtlohnsumme durch Gesamtarbeitsstunden $L = \sum L_j$),
- Dabei wird "eine der Waren j zum Wertstandard (numéraire), ihr Preis als Einheit gewählt, $p_j = 1$." (Sraffa, "Warenproduktion mittels Waren",

$$\mathbf{S}'\mathbf{p} + r \cdot \mathbf{S}'\mathbf{p} + w \cdot \mathbf{L} = \mathbf{S}'\mathbf{p} + r \cdot \mathbf{S}'\mathbf{p} + (R - r) \cdot \mathbf{S}'\mathbf{p} = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{x}. \quad (4)$$

- Danach wird die Koeffizientenmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ definiert,

$$\mathbf{S}'\mathbf{p}(1 + R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{C}'\mathbf{p} = (\frac{1}{1 + R})\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{C}'\mathbf{p} = \lambda_C \mathbf{p}. \quad (5)$$

- R ist die **maximale Gewinnrate**, $0 \leq r \leq R$,

produktives Sraffa Modell (8)

- **produktives Sraffa Modell**, $\mathbf{d} \geq \mathbf{o} (> \mathbf{o})$. Dann gilt : $\lambda_C < 1$ (Satz A.12.1, in *Sraffa and Leontief Revisited*, Emmenegger & al, p. 479. oder in Ashmanov, Theorem 1.5, p. 39). Damit haben wir die verschärfte Bedingung $\lambda_C \in]0, 1[$.

$$0 < \lambda_C = \frac{1}{1+R} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda_C} - 1 > 0. \tag{6}$$

- Es gilt : $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Die Verbindung zwischen der Leontief IOT und Sraffa IOT geht über den Preisvektor $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S} \Leftrightarrow \mathbf{S} = \hat{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{q} > \mathbf{o}, \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d} \geq \mathbf{o}. \tag{7}$$

- In der Leontief IOT gelten die uns schon bekannten Gleichungen.

$$\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{x}_I + \mathbf{f} = \mathbf{y}_I + \mathbf{v} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} = \mathbf{y}. \tag{8}$$

- Die **maximale Gewinnrate** R (6) bekommt eine weitere Bedeutung.

Mass der Kapitalproduktivität im Sraffa Preismodell (9)

- Vorschlag : Wert der letzten Verwendung (Jahresüberschuss) $\mathbf{d} > \mathbf{o}$ der Wirtschaft als Output in Beziehung zum Wert der Produktionsmittel, dargestellt durch die Verflechtungsmatrix $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$ als Input,

$$\mathbf{d} = \mathbf{q} - \mathbf{S}\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}\mathbf{e} = \mathbf{I}\mathbf{q} - \mathbf{C}\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{q}. \tag{9}$$

- Dann nimmt man den Preisvektor $\mathbf{p} > \mathbf{o}$. Man erhält den Wert des Outputs : $\mathbf{p}'\mathbf{d} = \mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{q}$. Der Wert des Inputs ist die aufsummierte Verflechtungsmatrix,

$$\mathbf{S}\mathbf{e} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{q}}\mathbf{q}) = (\mathbf{S}\hat{\mathbf{q}})\mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}'\mathbf{S}\mathbf{e} = \mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q}. \tag{10}$$

- Man erhält die Kapitalproduktivität ρ. Man setzt das Sraffa Preismodelles ein und erhält die *Kapitalproduktivität der Ökonomie*, <u>dargestellt in physischen Grössen</u>,

$$\rho = \frac{\mathbf{p}'\mathbf{d}}{\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{q}}{\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q}}. \tag{11}$$

Max. Gewinnrate R als Mass der Kapitalproduktivität (10)

- Nun nehmen wir das spezifische Sraffapreismodell (5). Wir transponieren die Matrixgleichung, wir erhalten $\mathbf{p}'\mathbf{C} + R\mathbf{p}'\mathbf{C} = \mathbf{p}'\mathbf{I}$, multiplizieren die Gleichung von rechts mit $\mathbf{q}$, und erhalten für R,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q} + R\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{p}'\mathbf{I}\mathbf{q} \Rightarrow R\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{p}'\mathbf{I}\mathbf{q} - \mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q}, \\ R\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{q} \Rightarrow R = \frac{\mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{q}}{\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{q}} = \rho. \end{aligned} \tag{12}$$

- Der Term ρ ist eine *Kapitalproduktivität* (12), und misst die Kapitalproduktivität der gesamten Wirtschaft, da sie auf Daten einer nationalen Sraffa IOT in physischen Grössen basiert, und gleich der maximalen Gewinnrate R ist.
- Die maximale Gewinnrate R hängt von $\mathbf{C}$, $\mathbf{q}$ und $\mathbf{p}$ ab, ausschliesslich Grössen des Sraffapreismodelles.

Ermittlung von R : Randwertproblem über $\mathbf{Z}$ (11)

Die Zahl $R > 0$ ist über Grössen berechenbar, die von der Verflechtungsmatrix $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$ stammen (IOT Leontief-Typ).

Lemma 1 : Man betrachte eine unzerlegbare oder zerlegbare Verflechtungsmatrix $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S}$ mit positiver Frobenius Zahl $\lambda_Z > 0$ und positivem Eigenvektor $\mathbf{s}_1 > \mathbf{o}$, $\mathbf{Z}\mathbf{s}_1 = \lambda_F \mathbf{s}_1$, und nicht-negativem Vektor $\mathbf{f} \geq \mathbf{o}$ der letzten Verwendung. Man erstelle die Vektoren $\mathbf{y}_I = \mathbf{Z}'\mathbf{e}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e}$ und $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_I$.

Die zum produktiven Sraffa Preismodell (5) definierte Kapitalproduktivität R (12), ist gleich dem Verhältnis der Skalarprodukte $\mathbf{s}_1'\mathbf{v}$ and $\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I$.

Die Frobenius Zahl λ_C der Matrix $\mathbf{C}$ (5) ist das Verhältnis der Skalarprodukte $\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I$ und $\mathbf{s}_1'\mathbf{y}$,

$$R = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}, \quad \lambda_C = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{s}_1'}{\mathbf{s}_1'(\mathbf{y}_I + \mathbf{v})} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}} = \frac{1}{1+R}. \qquad (13)$$

Beweis von Lemma 1 (12)

Beweis : Aus den Voraussetzungen folgt, dass der abgeschwächte Satz von Perron-Frobenius anwendbar ist ($\lambda_C > 0, \mathbf{p} > \mathbf{o}$).

$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}$, $\mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{q} = \mathbf{x} = \mathbf{y} > \mathbf{o}, \mathbf{p} > \mathbf{o}, \mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d}$.

Das Sraffa Preismodel (7) ist produktiv, da $\mathbf{f} \geq \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{d} \geq \mathbf{o}$.

Wir setzen $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$, $\lambda_C := 1/(1+R) < 1$, $\mathbf{S}'\mathbf{p} = \lambda_C \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}$.
Nach Definition gilt : $\mathbf{Z}' = \mathbf{S}'\hat{\mathbf{p}}$ und $\underline{\mathbf{y}_I = \mathbf{Z}'\mathbf{e} = \mathbf{S}'\hat{\mathbf{p}}\mathbf{e} = \mathbf{S}'\mathbf{p}}$.

Dann erhält man mit (5), (8) : $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{q}$. Mit (3) ergibt sich $(\lambda_F \mathbf{s}_1')\mathbf{e} = (\mathbf{s}_1'\mathbf{Z}')\mathbf{e} = \mathbf{s}_1'(\mathbf{Z}'\mathbf{e}) = \mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I$. Aus diesem Grund :

$\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I = \mathbf{s}_1'(\mathbf{S}'\mathbf{p}) = \mathbf{s}_1'\,(\lambda_C \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p}) = \lambda_C\,(\mathbf{s}_1'\mathbf{y}) = \lambda_C\,\mathbf{s}_1'(\mathbf{y}_I + \mathbf{v}) \Rightarrow$

Frobenius Zahl λ_C und die Kapitalproduktivität $R > 0$ sind :

$$\lambda_C = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I + \mathbf{s}_1'\mathbf{v}} = \frac{1}{1 + (\frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I})} =: \frac{1}{1+R}, \quad R = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}. \blacktriangle \tag{14}$$

Beispiel : Randwertaufgabe (13)

Beispiel *Man betrachte eine Ökonomie bestehend aus* $n = 2$ *Sektoren, von der man folgende Matrizen und Vektoren kennt,*

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Man berechne : $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}$, $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$, *die Frobeniuszahl* $\lambda_C > 0$, *die Produktivität* $R = (\frac{1}{\lambda_C}) - 1$ *und den Preiseigenvektor* $\mathbf{p} = [1, p_2]'$ *der Matrix* $\mathbf{C}$. *Dann berechne man* $\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S}$, *die Frobeniuszahl* λ_F, *die zugehörigen Vektoren* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}_I$, $\mathbf{y}_I$ *und* $\mathbf{v}$, *den normierten Eigenvektor* $\mathbf{s}_1 = [s_{11}, 1]$ *von* $\mathbf{Z}$, *so dass* $\mathbf{Z}\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1$. *Man überprüft* $\lambda_C = (\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I)/(\mathbf{s}_1'\mathbf{y})$, $R = \mathbf{s}_1'\mathbf{v}$. *Dann berechne man auch* $\lambda_C = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}}$ *und* $R = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}$.

Lösung des Beispiels :

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Beispiel : Randwertaufgabe (14)

Die Frobenius Zahl von $\mathbf{C}$ ist $\lambda_C = 2/3$, die Produktivität der Matrix $\mathbf{C}$ ist $R = (1/\lambda_C) - 1 = 1/2$. Die Eigenwertgleichung ist $\mathbf{Cp} = \frac{2}{3}\mathbf{p}$, der Preiseigenvektor ist $\mathbf{p} = [1, 3]'$, die Frobeniuszahl von $\mathbf{Z}$ ist $\lambda_F = 8.2729$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \hat{\mathbf{p}}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x}_I = \mathbf{Ze} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_I = \mathbf{Z}'\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x} = (\mathbf{Ze} + \mathbf{f}) &= \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_I = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Man berechnet die Frobenius Zahl $\lambda_Z = 8.275$ der matrix $\mathbf{Z}$ und den assoziierten genormten Eigenvector $\mathbf{s}_1 = [0.758, 1]'$. Dann,

$$
\lambda_C = \frac{1}{1+R} = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{y_I}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}} = \frac{\begin{bmatrix} 0.758 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0.758 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}} = \frac{2}{3}, \quad R = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I} = \frac{\begin{bmatrix} 0.758 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0.758 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}. \ \blacktriangle
\tag{18}
$$

Lemma 1 zeigt, dass der Eigenwert λ_C der Matrix $\mathbf{C}$ und die maximale Gewinnrate, die gleich Kapitalproduktivität R ist, direkt als Lösung einer **Randwertaufgabe** zur Verflechtungsmatrix $\mathbf{Z}$ berechnet werden kann.

Zusammenfassung (15)

- Ausgehend von einer Sraffa IOT mit gegebener Verflechtungsmatrix $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$, Überschussvektor $\mathbf{d} \geq \mathbf{o}$ und Outputvektor $\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{d}$ ist die maximale Gewinnrate R aus einer Eigenwertgleichung darstellbar,
$$\mathbf{S}'\mathbf{p}(1+R) = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{C}'\mathbf{p}(1+R) = \mathbf{p}, \tag{19}$$
- Sraffa IOTs in physischen Grössen sind von nationalen Statistikämter (noch) nicht berechenbar.
- Man geht dann über zu einer Leontief IOT in monetären Grössen mit der Verflechtungsmatrix $\mathbf{Z} \geq \mathbf{0}$, dem Vektor der letzten Verwendung $\mathbf{f} \geq \mathbf{o}$, dem Vektor $\mathbf{v}$ der Wertschöpfungen, $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{y}_I + \mathbf{v} = \mathbf{Z}'\mathbf{e} + \mathbf{v} = \mathbf{y}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_I$.
- Mit den Eigenvektoren $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{Z}\mathbf{s}_1 = \lambda_Z \mathbf{s}_1$, erweist sich die maximale Gewinnrate R gleich der Kapitalproduktivität der Sraffa Wirtschaft und ist berechenbar : $R = \frac{\mathbf{s}_1'\mathbf{v}}{\mathbf{s}_1'\mathbf{y}_I}$,

Deutschland, Österreich, Schweiz (16)

Rubrik	Deutschland	Österreich	Schweiz
Jahr	2013	2015	2014
Verflechtungsmatrix	72×72	65×65	49×49
Laufende Nr.			
Matrix der Verwendungen	72×12	65×15	49×24
Wertschöpfungsmatrix	10×72	16×65	4×49

Länder	letzte Verwendung von Gütern				Import	Ergiebigkeit
	Konsum der Haushalte C	Gesamtinvestitionen I	Staatsausgaben G	Export E	M	R
D (EURO)	1'472'436	551'462	593'728	1'257'691	1'049'077	0.6771
A (EURO)	188'848	81'955	68'033	167'908	162'473	0.7043
CH (CHF)	345'035	158'682	77'777	351'212	282'987	1.1518
1 € $=$ 1.15 CHF						

Table – Kenngrössen der VGR und die Ergiebigkeit